ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 11

Перенос ошибок при преобразовании случайных величин

x, y – случайные величины. Преобразование:

$$z = f(x, y)$$

Линейное приближение z в окрестности точки x_0, y_0 :

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0)$$

$$f(u, v) = A_1 u + A_2 v + B$$

$$\langle f(u, v)\rangle = A_1 \langle u\rangle + A_2 \langle v\rangle + B$$

$$\sigma^2_{f(u,v)} = A_1^2 \sigma_u^2 + A_2^2 \sigma_v^2 + 2A_1 A_2 \operatorname{cov}(u, v)$$

$$f\left(x,y\right)\approx f\left(x_0,y_0\right)+\left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\right]\left(x-x_0\right)+\left[\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\right]\left(y-y_0\right)$$

Устанавливаем: $x_0=\langle x\rangle,\quad y_0=\langle y\rangle$

$$f\left(x,y\right)=A_1\left(x-\langle x\rangle\right)+A_2\left(y-\langle y\rangle\right)+B$$

$$A_1=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\langle x\rangle,\langle y\rangle\right)\qquad A_2=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\langle x\rangle,\langle y\rangle\right)\qquad B=f\left(\langle x\rangle,\langle y\rangle\right)$$

$$\left\langle f\left(x,y\right)\right\rangle=A_1\left\langle x-\langle x\rangle\right\rangle+A_2\left\langle y-\langle y\rangle\right\rangle+B=$$

$$=B=f\left(\langle x\rangle,\langle y\rangle\right)$$

$$\sigma^2_{f(x,y)}=A_1^{\,2}\sigma_x^2+A_2^{\,2}\sigma_y^2+2A_1A_2\operatorname{cov}\left(x,y\right)$$

Пример: $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

Здесь $A_1 = \dfrac{1}{\langle y \rangle}, \quad A_2 = -\dfrac{\langle x \rangle}{\langle y \rangle^2}$

Тогда $\left\langle \dfrac{x}{y} \right\rangle \approx \dfrac{\langle x \rangle}{\langle y \rangle} \qquad \sigma_{x/y}^2 \approx \dfrac{1}{\langle y \rangle^2}\sigma_x^2 + \dfrac{\langle x \rangle^2}{\langle y \rangle^4}\sigma_y^2$

Квадрат относительного отклонения: $\dfrac{\sigma_{x/y}^2}{\langle x/y \rangle^2} \approx \dfrac{\sigma_x^2}{\langle x \rangle^2} + \dfrac{\sigma_y^2}{\langle y \rangle^2}$

Относительное отклонение: $\dfrac{\sigma_{x/y}}{\langle x/y \rangle} < \dfrac{\sigma_x}{\langle x \rangle} + \dfrac{\sigma_y}{\langle y \rangle}$

Линеаризация регрессии –

преобразование

1) независимой переменной, влияющей
на математическое ожидание случайной величины и
2) вида регрессионной зависимости

таким образом, чтобы преобразованная случайная величина зависела от преобразованного аргумента линейно.

Пример 1 – закон Аррениуса для зависимости скорости химического процесса от температуры:

$$V = Ke^{-\frac{E}{T}} \qquad T = 273.15 + t^{\circ}C$$

Линеаризация: $\ln V = \ln K - \frac{E}{T}$

$$f_1 = 1, \quad f_2 = \frac{1}{T} \qquad f = p_1 + p_2 \frac{1}{T}$$

$$p_1 = \ln K, \quad p_2 = -E \qquad K = e^{p_1}, \quad E = -p_2$$

$$\frac{\partial K}{\partial p_1} = e^{p_1}, \quad \frac{\partial K}{\partial p_2} = 0 \qquad \sigma_K^2 = e^{2p_1}\sigma_{p_1}^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial p_2} = -1 \qquad \sigma_E^2 = \sigma_{p_2}^2$$

Пример 2 –зависимость скорости химической реакции от концентрации субстрата:

$$V = \frac{V_0 C}{K_C + C}$$

Линеаризация: $$\frac{1}{V} = \frac{1}{V_0} + \frac{K_C}{V_0}\frac{1}{C}$$

$$f_1 = 1, \quad f_2 = \frac{1}{C} \qquad\qquad f = p_1 + p_2\frac{1}{C}$$

$$p_1 = \frac{1}{V_0}, \quad p_2 = \frac{K_C}{V_0} \qquad\qquad V_0 = \frac{1}{p_1}, \quad K_C = p_2 V_0 = \frac{p_2}{p_1}$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial p_1} = -\frac{1}{p_1^{\;2}}, \quad \frac{\partial V_0}{\partial p_2} = 0 \qquad\qquad \sigma_{V_0}^2 = \frac{1}{p_1^{\;4}}\sigma_{p_1}^2$$

$$\frac{\partial K_C}{\partial p_1} = -\frac{p_2}{p_1^{\;2}}, \quad \frac{\partial K_C}{\partial p_2} = \frac{1}{p_1} \qquad\qquad \sigma_{K_C}^2 = \frac{p_2^{\;2}}{p_1^{\;4}}\sigma_{p_1}^2 + \frac{1}{p_1^{\;2}}\sigma_{p_2}^2$$