# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
# И
# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 12

# Преобразования случайных величин

Известное распределение вероятностей: $p_x\left(x_k\right)$

Замена случайной переменной: $y = f\left(x\right)$

Задача: найти распределение вероятностей новой случайной переменной $y$: $p_y\left(y_l\right)$

Общий приём при преобразовании случайных величин – использование обратной функции:

$x = f^{-1}\left(y\right)$. Другое обозначение: $x = x\left(y\right)$

## 1. Дискретная случайная величина $x$

А) взаимно однозначное соответствие между $x$ и $y$

$$p_y(y_k) = p_x(x_k) = p_x(x(y_k))$$

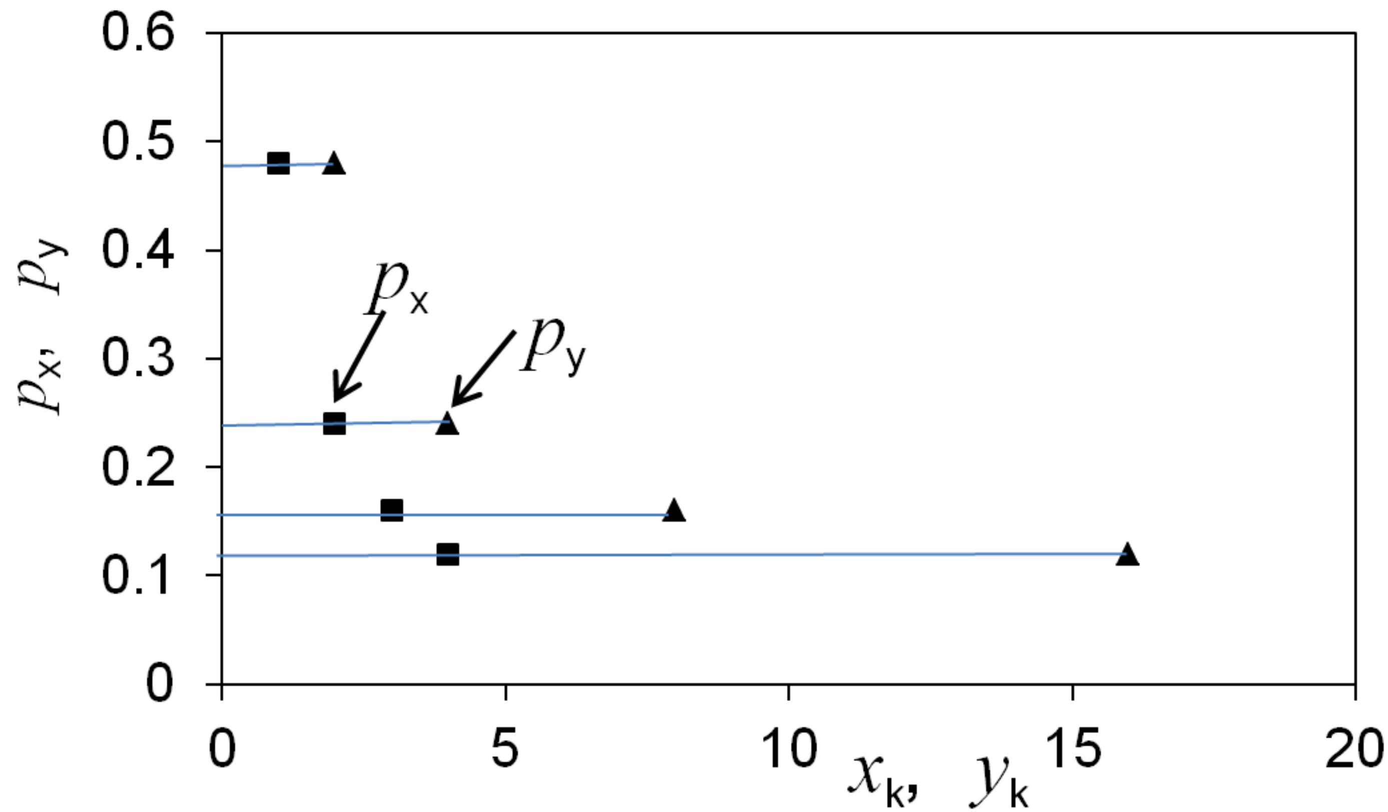
---

Пример: $x_k = 1, 2, 3, 4$; $y = 2^x$; $y_k = 2, 4, 8, 16$

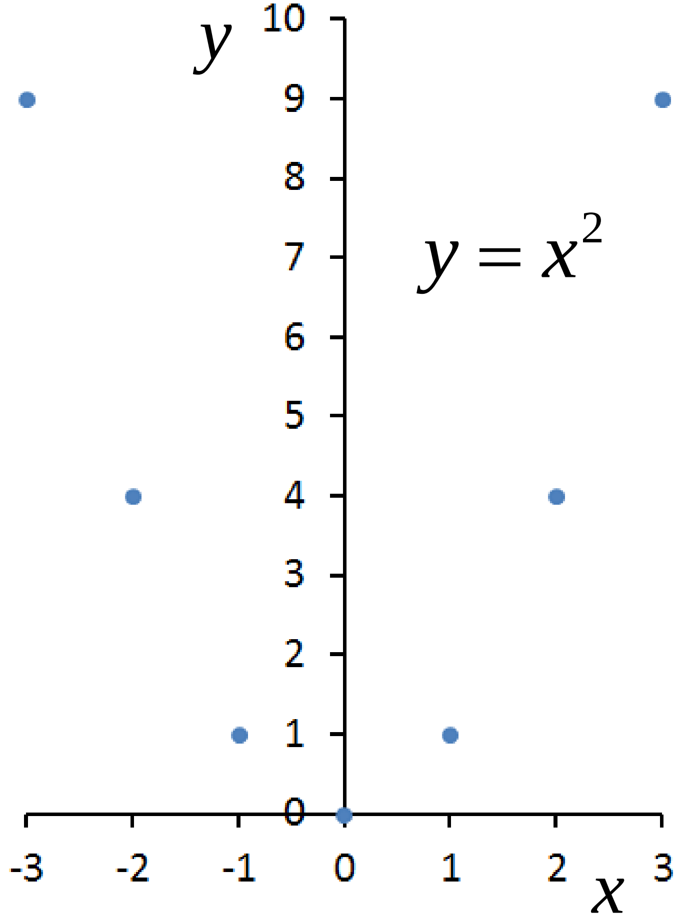
Пусть $p_x(x) = \dfrac{C}{x}$, $p_x(x_k) = C, \dfrac{C}{2}, \dfrac{C}{3}, \dfrac{C}{4}$

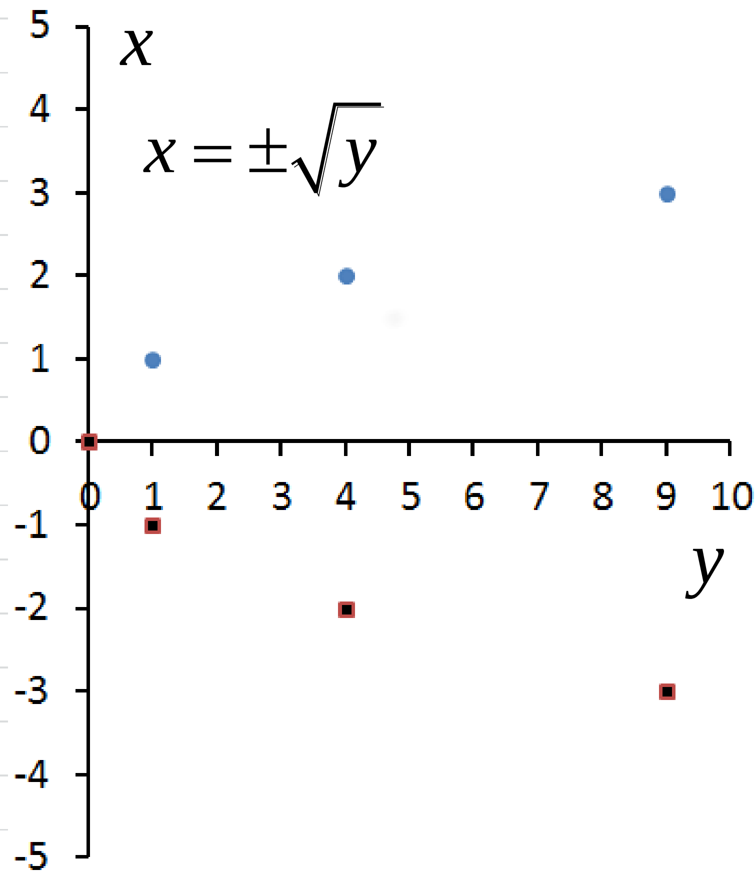
Нормировка: $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} p_x(x_k) = 1$ $\quad C\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\right) = C\dfrac{25}{12} = 1$ $\quad \boxed{C = \dfrac{12}{25} = 0.48}$

| $x_k$ | $y = 2^x$ | $p_x(x_k) = \frac{0.48}{x_k} = p_y(y_k) = \frac{0.48}{\log_2 y_k}$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 0.48 |
| 2 | 4 | 0.24 |
| 3 | 8 | 0.16 |
| 4 | 16 | 0.12 |



Б) обратная функция $x(y)$ – неоднозначная



$$p_l = p_y\left(y_l\right) = \sum_{k(l)} p_x\left(x_{k(l)}\right)$$

| $k$ | $x$ | $y = x^2$ | $p_k$ |
|---|---|---|---|
| 1 | –3 | 9 | 1/7 |
| 2 | –2 | 4 | 1/7 |
| 3 | –1 | 1 | 1/7 |
| 4 | 0 | 0 | 1/7 |
| 5 | 1 | 1 | 1/7 |
| 6 | 2 | 4 | 1/7 |
| 7 | 3 | 9 | 1/7 |

| $l$ | $y$ | $k(l)$ | $x = \pm\sqrt{y}$ | $p_l$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 0 | 1/7 |
| 2 | 2 | 3, 5 | $\mp 1$ | 2/7 |
| 3 | 4 | 2, 6 | $\pm 2$ | 2/7 |
| 4 | 9 | 1, 7 | $\pm 3$ | 2/7 |

## 2. Непрерывная случайная величина $x$

А) взаимно однозначное соответствие между $x$ и $y$

Попадание $x$ в интервал $\left(x,\ x+dx\right)$ соответствует попаданию $y$ в интервал $\left(y,\ y+dy\right)$.

$w_x\left(x\right)$ известно, преобразование $y = f\left(x\right)$ задано,

требуется найти $w_y\left(y\right)$.

$$w_y\left(y\right)dy = w_x\left(x\right)dx$$

$$w_y(y)\,dy = w_x(x)\,dx$$

Из $x = f^{-1}(y)$ (другая запись: $x = x(y)$) находим:

$$dx = \left|\frac{dx}{dy}\right| dy$$

Отсюда $$w_y(y) = w_x(x(y))\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

---

Б) обратная функция $x(y)$ – неоднозначная

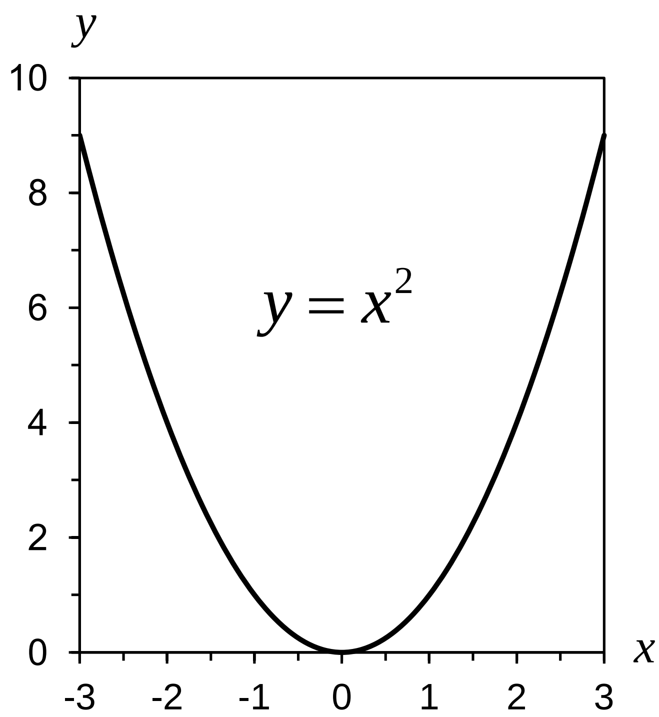
$$w_y(y) = \sum_b w_x(x_b(y))\left|\frac{dx_b}{dy}\right|$$

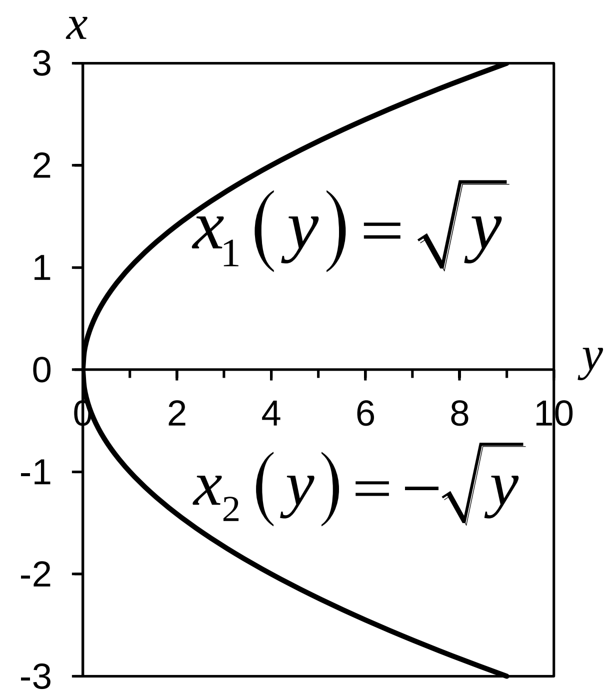
где $b$ – номер <u>ветви</u> функции $x(y)$

Важный пример: $y = f(x) = x^2$

$$\left|\frac{dx_{1,2}(y)}{dy}\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Обратная функция: $x(y) = \pm\sqrt{y}$



$$w_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

---

$$w_y(y) = w_x(x_1(y))\left|\frac{dx_1}{dy}\right| + w_x(x_2(y))\left|\frac{dx_2}{dy}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{[x_1(y)]^2}{2\sigma_x^2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{[x_2(y)]^2}{2\sigma_x^2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{y}{2\sigma_x^2}}$$

Более общий вариант: $$w_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$x - \langle x\rangle = x_1, \quad dx = dx_1$$

$$w_{x1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{x_1^{\ 2}}{2\sigma_x^2}}$$

$$y = x_1^{\ 2}, \quad x_1 = \pm\sqrt{y}$$

$$w_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{y}{2\sigma_x^2}}$$

$$y = (x - \langle x\rangle)^2$$

## Γ-распределение

Γ-функция: $$\Gamma(z)=\int_0^\infty v^{z-1}e^{-v}dv$$

$\Gamma(n)=(n-1)!$ ($n=1,2,3,\dots$ – натуральное число) $\qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

---

Общий вид Γ-распределения: $$w(y,\alpha,\beta)=Cy^{\alpha-1}e^{-\frac{y}{\beta}}$$

Нормировка: $$C\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-\frac{y}{\beta}}dy=1$$ $$\frac{y}{\beta}=v,\quad y=\beta v$$

$$C\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-\frac{y}{\beta}}dy=C\beta^{\alpha-1}\beta\Gamma(\alpha)=1 \qquad C=\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}$$

Окончательный вид $\Gamma$-распределения:

$$w^{(\Gamma)}(y,\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-\frac{y}{\beta}},\quad 0\le y<\infty$$

---

$$w_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}\qquad \boxed{y=x^2}\qquad w_y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{y}{2\sigma_x^2}}$$

---

$$\beta=2\sigma_x^2,\ \alpha=\frac{1}{2},\ \beta^{\alpha}=\sqrt{2\sigma_x^2}$$

$$w_y(y)=w^{(\Gamma)}\left(y,\frac{1}{2},2\sigma_x^2\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

ПФМ для начальных моментов величины $y$, имеющей $\Gamma$-распределение:

$$M_y^I(u,\alpha,\beta)=\int\limits_0^\infty e^{uy}w^{(\Gamma)}(y,\alpha,\beta)dy=\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty y^{\alpha-1}e^{\left(u-\frac{1}{\beta}\right)y}dy$$

$$\left(u-\frac{1}{\beta}\right)y=-v,\quad y=\frac{\beta}{1-\beta u}v,\quad dy=\frac{\beta}{1-\beta u}dv,\quad y^{\alpha-1}dy=\left(\frac{\beta}{1-\beta u}\right)^\alpha v^{\alpha-1}dv$$

$$M_y^I(u,\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty\left(\frac{\beta}{1-\beta u}\right)^\alpha v^{\alpha-1}e^{-v}dv=$$

$$=\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\frac{\beta^\alpha}{(1-\beta u)^\alpha}\Gamma(\alpha)=\frac{1}{(1-\beta u)^\alpha}=(1-\beta u)^{-\alpha}$$

$$M_y^I(u,\alpha,\beta)=(1-\beta u)^{-\alpha}$$

0) $M_y^I(0,\alpha,\beta)=(1)^{-\alpha}=1$

---

1) $$\frac{d}{du}\left[M_y^I(u,\alpha,\beta)\right]=(-\alpha)(1-\beta u)^{-\alpha-1}(-\beta)=\alpha\beta(1-\beta u)^{-(\alpha+1)}$$

$$\boxed{m_y^{(1)}=\alpha\beta}$$

---

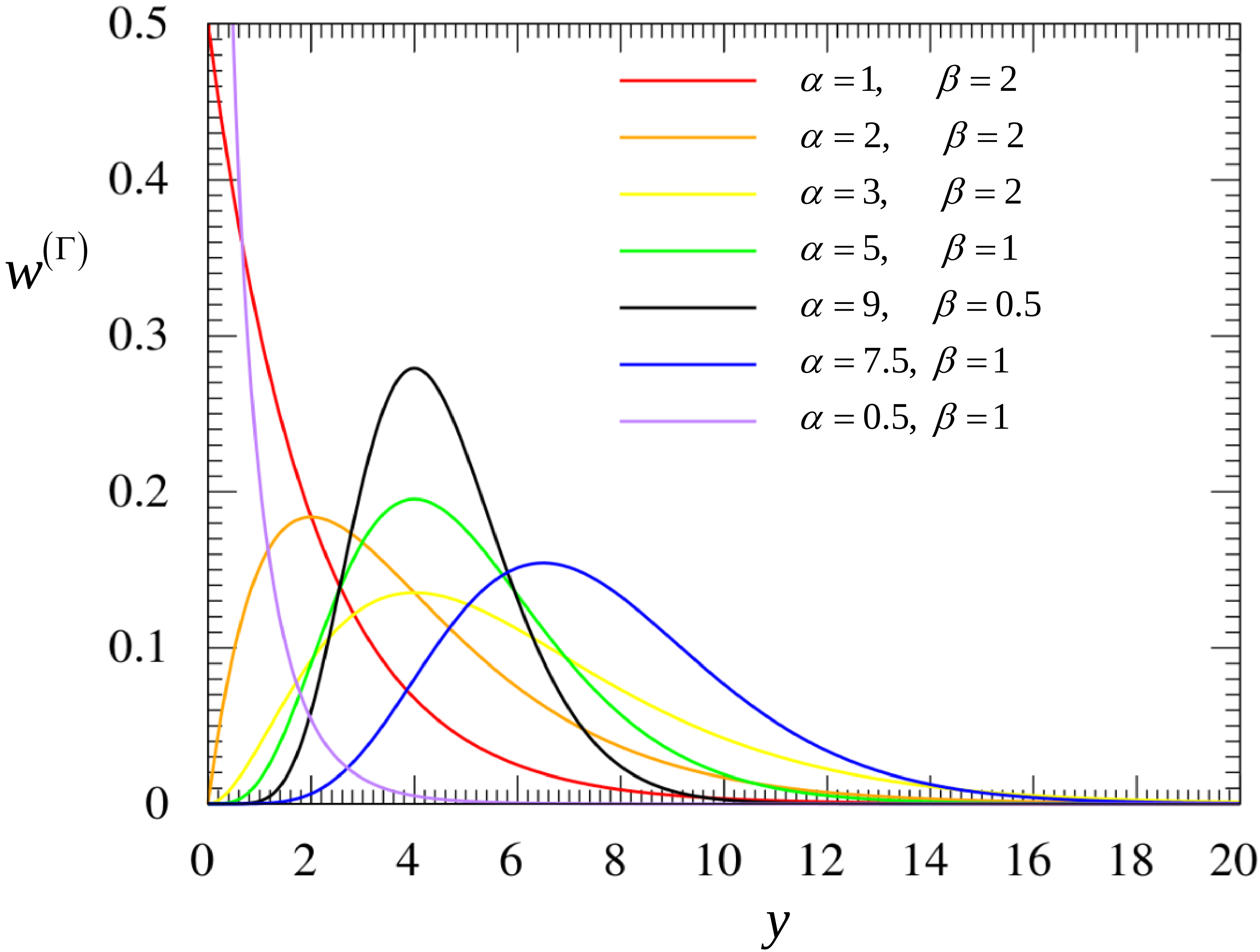
2) $$\frac{d^2}{du^2}\left[M_y^I(u,\alpha,\beta)\right]=\alpha\beta\left[-(\alpha+1)\right](1-\beta u)^{-(\alpha+2)}(-\beta)=$$

$$=\alpha(\alpha+1)\beta^2(1-\beta u)^{-(\alpha+2)}$$

$$\boxed{m_y^{(2)}=\alpha(\alpha+1)\beta^2}$$

---

$$\sigma_y^2=m_y^{(2)}-\left[m_y^{(1)}\right]^2=\alpha(\alpha+1)\beta^2-\alpha^2\beta^2=\alpha\beta^2$$



$\alpha = 1, \quad \beta = 2$
$\alpha = 2, \quad \beta = 2$
$\alpha = 3, \quad \beta = 2$
$\alpha = 5, \quad \beta = 1$
$\alpha = 9, \quad \beta = 0.5$
$\alpha = 7.5, \quad \beta = 1$
$\alpha = 0.5, \quad \beta = 1$
$w^{(\Gamma)}$
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
$y$