ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 9

Дисперсия суммы одинаково распределенных случайных величин:

$$\sigma_{\Sigma x}^2 = \left\langle \left(\Sigma x\right)^2 \right\rangle - \left\langle \Sigma x \right\rangle^2 = N(N-1)\left\langle x \right\rangle^2 + N\left\langle x^2 \right\rangle - N^2\left\langle x \right\rangle^2 =$$

$$= N\left\langle x^2 \right\rangle - N\left\langle x \right\rangle^2 = N\sigma_x^2$$

Среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma_{\Sigma x} = \sqrt{N}\sigma_x$$

Относительное отклонение:

$$\frac{\sigma_{\Sigma x}}{\left\langle \Sigma x \right\rangle} = \frac{\sqrt{N}\sigma_x}{N\left\langle x \right\rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{\sigma_x}{\left\langle x \right\rangle}$$

Статистические параметры и их выборочные оценки

Выборка – совокупность данных, полученных из ограниченного числа испытаний.

λ – статистический параметр,

$S\left(x_1 \ldots x_N\right)$ – его статистическая оценка по выборке $\left(x_1 \ldots x_N\right)$

Оценка называется несмещенной, если $E\left\{S\left(x_1 \ldots x_N\right)\right\}=\lambda$ при всех значениях N.

Оценка называется состоятельной, если ее дисперсия при увеличении объема выборки стремится к нулю:

$$\lim_{N \to \infty} \sigma_S = 0$$

Среднее по выборке

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n = \frac{1}{N}\Sigma x$$

Ранее получено:

$$\langle Ay \rangle = A\langle y \rangle \qquad \sigma_{Ay}^2 = A^2\sigma_y^2 \qquad \Big| \qquad \langle \Sigma x \rangle = N\langle x \rangle \qquad \sigma_{\Sigma x}^2 = N\sigma_x^2$$

Здесь $y = \Sigma x$

Тогда

$$\langle \bar{x} \rangle = \frac{1}{N}\langle \Sigma x \rangle = \frac{1}{N} N\langle x \rangle = \langle x \rangle$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N^2}\sigma_{\Sigma x}^2 = \frac{1}{N^2} N\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sigma_x^2 \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma_x$$

Выборочная дисперсия

$$S^2 = \sum_{n=1}^{N} \left(x_n - \overline{x} \right)^2 = \sum_{n=1}^{N} \left(x_n - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k \right)^2$$

Преобразование S^2

$$S^2 = \sum_{n=1}^{N} \left(x_n - \langle x \rangle + \langle x \rangle - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k \right)^2 = \sum_{n=1}^{N} \left(x_n - \langle x \rangle - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(x_k - \langle x \rangle \right) \right)^2$$

$$\left\langle S^2 \right\rangle = (N-1)\sigma_x^2 \qquad \sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \left\langle S^2 \right\rangle$$

Выборочная дисперсия:

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1} S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} \left(x_n - \overline{x} \right)^2$$

Выборочная дисперсия:

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left(x_n - \overline{x}\right)^2$$

Выборочное среднее
квадратичное отклонение:

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left(x_n - \overline{x}\right)^2}$$

Выборочная оценка
3 центрального момента:

$$\tilde{\mu}_x^{(3)} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left(x_n - \overline{x}\right)^3$$

Выборочная оценка
4 центрального момента:

$$\tilde{\mu}_x^{(4)} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left(x_n - \overline{x}\right)^4$$

Выборочный коэффициент
асимметрии:

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{\tilde{\mu}_x^{(3)}}{\left(s_x\right)^3}$$

Выборочный коэффициент
эксцесса:

$$\tilde{\gamma}_2 = \frac{\tilde{\mu}_x^{(4)}}{\left(s_x\right)^4} - 3$$

Выборочная ковариация

$$\operatorname{cov}(x,y) = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left(x_n - \overline{x}\right)\left(y_n - \overline{y}\right)$$

Все выражения для выборочных оценок справедливы
для любого распределения вероятностей